

door H. J. Nabbe

Inleiding

Bepaalde investeringscalculaties zoals calculaties met betrekking tot vervangings-investeringen en elkaar om technische of organisatorische redenen uitsluitende investeringsalternatieven (keuze uit alternatieve produktiemachines, keuze uit dagdienst, tweeploegendienst, etc.) behoren naar onze mening uitgevoerd te worden met behulp van de berekening, van wat door ons genoemd wordt, het „offerminimum” van het duurzame produktiemiddel.

Nadat we het begrip offerminimum hebben gedefinieerd en het gebruik van dit instrument ten behoeve van de voorgaand vermelde investeringscalculaties hebben toegelicht, gaan we het offerminimum mathematisch formuleren, respectievelijk nader uitwerken voor drie casus-posities en wel de volgende:

- (1) lineair stijgende slijtage van het duurzame produktiemiddel
- (2) progressief stijgende slijtage
- (3) degressief stijgende slijtage

Vervolgens worden de door ons berekende offerminima vergeleken met soortgelijke berekeningen van Traas*). Het doel van deze vergelijking is te illustreren dat met name een geringe divergentie in het startpunt van de slijtage van duurzame produktiemiddelen een verregaande invloed heeft op de grootte van het berekende offerminimum in geval van duurzame produktiemiddelen met betrekkelijk korte levensduren.

Dit feit en de omstandigheid dat de gehanteerde progressieve en degressieve functies voor het verloop van de slijtage (inferioriteitsverloop) een in hoge mate arbitrair karakter hebben, pleiten naar onze mening voor de toepassing van een eenvoudige calculatiemethode voor de bepaling van het offerminimum. Wij menen dat de door ons ontwikkelde formules hiervoor een theoretisch en praktisch verantwoorde solutie geven.

Offerminimum

De optimale levensduur van een duurzaam produktiemiddel is de periode waarover de annuïteit van:

de aanschafkosten plus de contante waarde van de complementaire kosten en de offers van economische slijtage minimaal is¹⁾. Deze definitie kan in formulevorm als volgt worden geschreven:

$$E = \frac{(1+r)^N r}{(1+r)^N - 1} \left[I + \sum_{n=1}^N \frac{g(n-1)}{(1+r)^N} + C_1 \right] = \text{minimaal}$$

E = annuïteit van: aanschafkosten plus de contante waarde van complementaire kosten en offers van economische slijtage

I = aanschafkosten (investeringsbedrag) duurzaam produktiemiddel

N = optimale levensduur

*) TRAAS, L. „Het Investerings- en Financieringsplan van de Onderneming N.V. Samson, 1967, 289 bldz.

¹⁾ Wij abstraheren hier van de eventuele restwaarde van het duurzame produktiemiddel. Indien men daarmee wel rekening wil houden moet de contante waarde van de restwaarde worden afgetrokken van de aanschafkosten van het duurzame produktiemiddel.

- n = jaren 1 tot N
 $g(n-1)$ = inferioriteitsverloop, d.i. het verloop van de complementaire kosten (technische slijtage) na het eerste jaar en de offers van economische slijtage²⁾
 C_1 = complementaire kosten in het eerste jaar
 r = „cost of capital”.

De formules voor E , door ons aangeduid met de term minimaal-formule, hebben wij niet geïntroduceerd met de bedoeling het vraagstuk van de levensduurschatting van duurzame produktiemiddelen opnieuw in beschouwing te nemen³⁾.

De reden dat de minimaal-formule in behandeling wordt genomen is dat wij op een bepaalde manier het „offerminimum” (E) willen schatten. Het offerminimum speelt namelijk een belangrijke rol in bepaalde investeringscalculaties, te weten bij calculaties ten behoeve van vervangingsinvesteringen en elkaar om technische of organisatorische redenen uitsluitende investeringsalternatieven.

Vervangingsinvesteringen

Een praktisch uitgangspunt om te bepalen of een bestaande machine vervangen moet worden door een nieuwe is een vergelijking van het offerminimum (E) van de nieuwe machine met de offers van de bestaande machine bij nog één jaar produktie. Deze calculatiemethode is door ons elders reeds vrij uitvoerig toegelicht⁴⁾.

Elkaar uitsluitende investeringsalternatieven

Het betreft hier in het algemeen het volgende vraagstuk:

- de bedrijfsleiding stelt zich een bepaald doel
- er zijn diverse middelen beschikbaar om het doel te bereiken
- de keuze van deze middelen geschiedt op grond van de laagste offers.

In concreto kan het gaan om een keuze uit verschillende machines om een produkt in een bepaald gewenst kwantum voort te brengen. Voor de oplossing van dit vraagstuk zal men de offerminima van de onderscheidene machines moeten bepalen en daaruit de laagste kiezen. Een ander voorbeeld is de keuze uit produceren van een bepaald produktievolume in normale dagdienst, 2-ploegendienst, 3-ploegendienst of 4-ploegendienst. Ook hier zal de selectie geschieden op grond van de laagste produktie-offers. De produktie-offers zijn de som van de offerminima van de machines gebruikt in de verschillende arbeidsvormen (normale dagdienst, 2-ploegendienst, etc.).

Bij een nadere beschouwing van de minimaal-formule zouden wij E kunnen opvatten als een functie van N en g , waarbij als parameters optreden I en r . Voor een bepaalde I en r is de optimale N , aangeduid als N^* , een functie van g .

Indien men N^* schat op basis van ervaring en intuïtie, anders gezegd: N^* introduceert als exogene grootte, kan men g schatten. Met de op deze manier be-

²⁾ In deze formule heeft de inferioriteit een lineair stijgend verloop. Een ander verloop is uiteraard mogelijk, bijv. degressief en progressief.

³⁾ Dit is reeds gebeurd in een voorgaand artikel in het M.A.B. n.l. artikel over levensduur van machines.

⁴⁾ Maandblad voor Bedrijfsadministratie en organisatie, no. 822, Sept. 1965, bldz. 315-318.

paalde g kan de minimale E berekend worden. Aldus kan een schatting worden gemaakt van het offerminimum van een duurzaam produktiemiddel.

Het is niet nodig van geval tot geval het offerminimum uit te rekenen. De minimaalformule kan zodanig worden uitgewerkt dat de minimale E , exclusief de complementaire kosten in het eerste jaar, wordt uitgedrukt in een percentage van het investeringsbedrag. Bij de uitwerking hebben wij de minimaal-formule, die in discrete vorm werd gepresenteerd, door een continue functie benaderd.

Lineair stijgende slijtage

$$E = \frac{e^{rN} r}{e^{rN} - 1} \left[I + g \int_1^N (n-1) e^{-rn} dn \right]$$

Stel $g = G.I$

$$E/I = \frac{e^{rN} r}{e^{rN} - 1} \left[1 + G \int_1^N (n-1) e^{-rn} dn \right]$$

Door E/I te differentiëren naar N krijgt men de optimale N^* als functie van G .

Men kan bewijzen dat geldt:

$$(E/I)_{\min.} = (N^* - 1) G$$

Indien G niet bekend is kan, door gebruik te maken van dit verband tussen N^* en G en de op een of andere manier gekende N^* , G zodanig worden bepaald dat met deze waarden van N^* en G een minimale $\frac{E}{I}$ optreedt.

N^* zal geschat moeten worden op basis van ervaring en intuïtie omdat er geen adequate basis is om G te voorspellen. Het verband tussen N^* en G is daarbij gelijk aan:

$$G = \frac{r^2}{r^{N^*} - 1 + e^{-rN^*} - e^{-r}}$$

Progressief stijgende slijtage

Indien men van mening is dat de inferioriteit van de machine zich in sterke mate zal manifesteren in de laatste fase van de economische levensduur is het zinvol de formule $\frac{E}{I}$ uit te werken voor een progressieve functie. Men moet er dan echter rekening mee houden dat de door ons gebruikte progressieve functie in hoge mate een arbitrair karakter heeft.

De gebruikte progressieve functie luidt:

$$G (n-1)^2$$

Ingevuld in de minimaal-formule geeft dit:

$$E/I = \frac{e^{rN} \cdot r}{e^{rN} - 1} \left[1 + G \int_1^N (n-1)^2 e^{-rn} dn \right]$$

Het verband tussen G en N* is nu:

$$G = \frac{r^3}{2r(N^* - 1) e^{-rN^*} + 2(e^{-rN^*} - e^{-r}) + r^2(N^* - 1)^2}$$

De optimale E/I is nu gelijk aan:

$$(E/I)_{\min.} = (N^* - 1)^2 \cdot G$$

Degressief stijgende slijtage

Indien men de mening is toegedaan dat de offers van economische slijtage vooral in de eerste fase van de optimale levensduur zullen optreden is het gewenst $\frac{E}{I}$ uit te werken voor een degressieve functie.

De door ons gekozen functie is:

$$cG (1 - e^{-\lambda(n-1)})$$

Ingevuld in de minimaal-formule geeft dit:

$$E/I = \frac{e^{rN} \cdot r}{e^{rN} - 1} \left[1 + cG \int_1^N (1 - e^{-\lambda(n-1)}) e^{-rn} dn \right]$$

Hierbij hebben we het volgende verband tussen c en λ aangenomen:

$$\lambda = \frac{\ln c}{\ln(c-1)}$$

Hierdoor is de economische en technische slijtage na 2 jaar - evenals bij het lineaire en het progressieve geval - gelijk aan g.

Deze functie is door ons berekend voor c=5.

Het verband tussen G en N* is hier:

$$G = \frac{r(\lambda + r)}{c \{ \lambda + r + e^{-(N^* - 1)} (e^{-rN^*} - \lambda - r) - \lambda e^{-r} \}}$$

De optimale E/I is gelijk aan:

$$(E/I)_{\min.} = cG (1 - e^{-\lambda(N^* - 1)})$$

Berekening van de optimale E/I

Bij een rentevoet van 10% is de optimale E/I (exclusief de complementaire kosten van het duurzame produktiemiddel in het eerste gebruiksjaar) voor de door ons in beschouwing genomen gevallen van lineaire, progressieve en degressieve slijtage berekend vanaf een levensduur van 2 jaar tot 25 jaar⁵⁾.

⁵⁾ Uitkomsten van berekeningen op basis van „cost of capital” van 12 - en 14% treft men aan in de bijlage.

Het offerminimum van een duurzaam produktiemiddel exclusief de complementaire kosten van het eerste jaar bij een „cost of capital” van 10% uitgedrukt in % van het investeringsbedrag dat met de aanschaf van het duurzame produktiemiddel gemoeid is. $(r = 10\%)$

levensduur in jaren	lineair stijgende inferioriteit	progressieve inferioriteit	degressieve inferioriteit ($c = 5$)	géén inferioriteit (annuïteit)
2	72,0	65,2	72,8	57,6
3	55,6	48,3	57,5	40,2
4	45,8	38,9	48,7	31,5
5	39,3	32,9	43,1	26,4
6	34,7	28,8	39,2	23,0
7	31,3	25,8	36,4	20,5
8	28,6	23,6	34,4	18,7
9	26,5	21,8	32,7	17,4
10	24,8	20,3	31,5	16,3
11	23,4	19,2	30,5	15,4
12	22,2	18,2	29,8	14,7
13	21,1	17,4	29,2	14,1
14	20,3	16,7	28,7	13,6
15	19,5	16,0	28,3	13,1
16	18,8	15,5	28,0	12,8
17	18,2	15,1	27,7	12,5
18	17,7	14,6	27,5	12,2
19	17,2	14,3	27,4	12,0
20	16,8	14,0	27,2	11,7
21	16,4	13,7	27,1	11,6
22	16,1	13,4	27,0	11,4
23	15,8	13,2	27,0	11,3
24	15,5	13,0	26,9	11,1
25	15,2	12,8	26,8	11,0

In een belangwekkend proefschrift „Het Investerings- en Financieringsplan van de Onderneming”, zijn door Traas⁶⁾ berekeningen van E/I gemaakt die wij vervolgens willen vergelijken met de onze. De door ons berekende E/I (offerminima) kunnen niet zonder meer vergeleken worden met die van Traas⁷⁾ en wel door de volgende oorzaken:

1 Laatstgenoemde gaat uit van de assumptie dat de economische slijtage, hij spreekt van technologische slijtage, altijd lineair stijgend verloopt. Het komt ons voor dat het realistischer is de mogelijkheden van een degressief en progressief verloop mede in aanmerking te nemen⁸⁾.

⁶⁾ Traas L. Het investerings- en financieringsplan van de onderneming N.V. Samson, 1967, 289 bldz.

⁷⁾ Traas gebruikt in dit verband de term eindinferioriteitspercentage (bldz. 125).

⁸⁾ Men raadplege hiervoor ons artikel in het M.A.B. van mei 1969 „Voorspelling van de Levensduur van Machines”.

2 Met betrekking tot het verloop van de technische slijtage, door hem aangeduid als technisch/atmosferische slijtage houdt Traas rekening met een lineair, een progressief en een degressief verloop. Het verloop van de totale inferioriteit wordt bepaald door de som van de lineair stijgende economische slijtage en de technische slijtage verlopend volgens één van de drie vermelde alternatieven. De keuzemogelijkheid met betrekking tot de technische slijtage komt ons vanuit de praktische gezichtshoek als overdreven voor indien deze niet bestaat voor de economische slijtage, en wel om de volgende redenen:

- a. door preventief onderhoud zijn de offers van technische slijtage tijdens de gebruiksduur van de machine veelal ieder jaar op een vrij constant niveau.
- b. Wij hebben de indruk dat in de huidige tijd en bepaald ook in de toekomst de economische slijtage, mede tegen de achtergrond van de factor (a), een overwegende rol speelt in de inferioriteit, en dat het derhalve niet erg zinvol is slechts verfijningen door te voeren voor een veel minder belangrijke in-vloedsfactor.

Wij kunnen onze cijfers vergelijken met die van Traas voor het geval Traas de technische en economische slijtage beide lineair stijgend laat verlopen. Dit is geschied in onderstaande tabel.

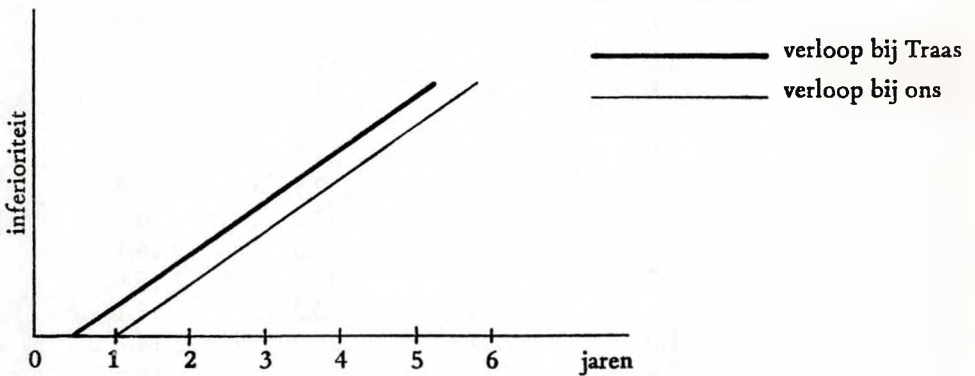
Het offerminimum van een duurzaam produktiemiddel exclusief de complementaire kosten van het eerste jaar bij een „cost of capital” van 10% uitgedrukt in % van het investeringsbedrag dat met de aanschaf van het duurzaam produktiemiddel gemoeid is.

levensduur in jaren	lineair stijgende inferioriteit	
	uitkomsten Traas	onze uitkomsten
2	84.4	72.0
3	64.3	55.6
4	52.1	45.8
5	44.1	39.3
6	38.5	34.7
7	34.4	31.3
8	31.3	28.6
9	28.8	26.5
10	26.8	24.8
11	25.1	23.4
12	23.7	22.2
13	22.6	21.1
14	21.5	20.3
15	20.7	19.5
16	19.9	18.8
17	19.2	18.2
18	18.6	17.7
19	18.1	17.2
20	17.6	16.8

Vooral bij korte levensduren zijn er aanzienlijke verschillen. Deze verschillen moeten in hoofdzaak worden toegeschreven aan het verschil in startpunt van de totale inferioriteit. Traas laat de inferioriteit aanvangen in het midden van het eerste jaar. Wij laten de inferioriteit starten aan het begin van het tweede jaar.

Het blijkt echter dat Traas de inferioriteit oorspronkelijk ook liet beginnen in het tweede jaar. Wij citeren: „is de marginale inferioriteit per periode (per jaar) constant en wordt dit constante bedrag aangeduid met het symbool g , dan zal de totale inferioriteit van jaar tot jaar het volgende verloop vertonen: jaar 1 : 0; jaar 2 : g ; jaar 3 : $2g$, enz.

Teneinde algemeen geldende formules te ontwikkelen voor de bepaling van de levensduur wordt door Traas later de veronderstelling van een discontinu verloop van de inferioriteit losgelaten en wordt van een continu stijgend verloop uitgegaan. Hij laat vervolgens de totale inferioriteit in het midden van het eerste jaar starten (men raadplege onderstaande tekening)



Wij zullen ons niet wagen aan een oordeel welke assumptie beter is. Wel zijn wij van mening dat de omwerking van de discontinue functie in de continue functie met betrekking tot het verloop van de totale inferioriteit door Traas niet op consistente wijze is geschied.

Veel belangrijker is de grote divergentie in de uitkomsten bij korte levensduren welke ontstaat tengevolge van een faseverschil in het inferioriteitsverloop van slechts $\frac{1}{2}$ jaar. Dit en de omstandigheid dat de gehanteerde progressieve en de degressieve functies voor het verloop van de slijtage (inferioriteitsverloop) een in hoge mate arbitrair karakter hebben, pleiten naar onze mening voor de toepassing van een eenvoudige calculatiemethode voor de bepaling van het offerminimum. Wij menen dat de door ons ontwikkelde formules hiervoor een theoretisch en praktisch verantwoorde solutie geven.

BIJLAGE

Het offerminimum van een duurzaam produktiemiddel exclusief de complementaire kosten van het eerste jaar bij een 'cost of capital' van 12% uitgedrukt in % van het investeringsbedrag dat met de aanschaf van het duurzame produktiemiddel gemoeid is.

$r = 12\%$

levensduur in jaren	lineaire inferioriteits- gradiënt	progressieve inferioriteits- gradiënt	degressieve inferioriteits- gradiënt ($c = 5$)	geen inferioriteit (annuïteit)
2	73,1	66,3	73,9	59,2
3	56,7	47,4	58,7	41,6
4	47,0	40,0	49,9	32,9
5	40,6	34,1	44,3	27,7
6	36,0	30,0	40,5	24,3
7	32,6	27,1	37,7	21,9
8	30,0	24,8	35,7	20,1
9	27,9	23,1	34,1	18,8
10	26,2	21,7	32,9	17,7
11	24,8	20,5	32,0	16,8
12	23,6	19,6	31,3	16,1
13	22,6	18,8	30,7	15,6
14	21,8	18,8	30,2	15,1
15	21,0	17,5	29,9	14,7
16	20,4	17,0	29,6	14,3
17	19,8	16,6	29,3	14,0
18	19,3	16,2	29,1	13,8
19	18,8	15,8	29,0	13,6
20	18,4	15,5	28,9	13,4
21	18,1	15,2	28,8	13,2
22	17,7	15,0	28,7	13,1
23	17,4	14,8	28,6	13,0
24	17,2	14,6	28,6	12,8
25	16,9	14,4	28,5	12,7

Het offerminimum van een duurzaam produktiemiddel exclusief de complementaire kosten van het eerste jaar bij een „cost of capital” van 14% in % van het investeringsbedrag dat met de aanschaf van het duurzame produktiemiddel gemoeid is.

$$r = 14\%$$

levensduur in jaren	lineaire inferioriteits- gradiënt	progressieve inferioriteits- gradiënt	degressieve inferioriteits- gradiënt ($c = 5$)	geen inferioriteit
2	74,2	67,4	75,0	60,7
3	57,9	50,5	59,9	43,1
4	48,3	41,2	51,2	34,3
5	41,9	35,3	45,6	29,1
6	37,4	31,3	41,8	25,7
7	34,0	28,4	39,1	23,3
8	31,4	26,2	37,1	21,6
9	29,3	24,4	35,6	20,2
10	27,7	23,1	34,4	19,2
11	26,3	21,9	33,5	18,3
12	25,2	21,0	32,8	17,7
13	24,2	20,2	32,3	17,1
14	23,3	19,6	31,8	16,7
15	22,6	19,0	31,5	16,3
16	22,0	18,5	31,2	16,0
17	21,4	18,1	31,0	15,7
18	20,9	17,7	30,8	15,5
19	20,5	17,4	30,6	15,3
20	20,1	17,1	30,5	15,1
21	19,8	16,9	30,4	15,0
22	19,4	16,7	30,4	14,8
23	19,2	16,4	30,3	14,7
24	18,9	16,3	30,3	14,6
25	18,7	16,1	30,2	14,5