ENKELE VOORBEELDEN VAN DE TOEPASSING VAN PROGRAMMERINGS-METHODEN OP DE INVESTERINGSSELEKTIE-PROBLEMATIEK

door Prof. Dr. S. E. de Jong

1 Inleiding

Dit artikel heeft een beperkte opzet. De bedoeling ervan is om, in overeenstemming met het karakter van dit speciale M.A.B.-nummer, te laten zien hoe (bekende) kwantitatieve methoden, op soms verrassend snelle wijze en met vele waardevolle nevenvoordelen, nieuwe oplossingen geven voor (bestaande) problemen in de bedrijfseconomie.

Er is naar volledigheid noch naar originaliteit gestreefd; de kwantitatieve methoden (mathematische programmering) zowel als de problematiek waarop deze worden toegepast (de investeringsselektie) zijn betrekkelijk willekeurig gekozen.

2 De problematiek: de beoordeling en selektie van investeringsplannen

Zoals wellicht bekend mag worden verondersteld betreft de investeringsselektie de problematiek van het beoordelen van investeringsplannen op hun aantrekkelijkheid (in casu winstgevendheid) zowel t.o.v. elkaar als t.o.v. de vermogenskosten nodig ter financiering van de plannen. In de praktijk en in de theorie zijn een aantal kriteria ontwikkeld waaraan de winstgevendheid van projecten kan worden getoetst; de zgn.: „netto contante waarde" (verder te noemen: n.c.w.) wordt zowel op theoretische gronden (t.a.v. de aanvaardbaarheid der „ingebouwde" veronderstellingen) als uit praktische overwegingen (betrekkelijk eenvoudige berekening) algemeen als het meest verkieslijk beschouwd. Deze n.c.w. is gedefinieerd als de - tegen de relevante vermogenskosten-voet gekapitaliseerde (d.i. kontant gemaakte) - waarde van alle, door het betreffende project gedurende de verwachte levensduur veroorzaakte, ingaande en uitgaande geldstromen (waaronder begrepen de initiële investering). Investeringsplannen die een positieve n.c.w. hebben zijn op zich aantrekkelijk; immers, rekening houdend met de vermogenskosten en met de spreiding van inkomsten en uitgaven over de tijd, worden positieve netto winsten verwacht. Een project met een grotere n.c.w. is mutatis mutandis te verkiezen boven één met een lagere n.c.w.

Bovenstaande kan eenvoudig in symbolen worden weergegeven.

Noemen we van een potentieel project j de

- gegenereerde „cash flow" (= ontvangsten minus uitgaven) in jaar t: R_{tj};
- de levensduur: n_j (dus $t = 1, 2, \ldots n_j$); en
- de vermogenskostenvoet: k,

dan veroorzaakt project j een positieve gekapitaliseerde winst, indien

$$\text{ncw}(j) = \sum_{t=0}^{n_j} \frac{R_{tj}}{(1+k)^t} > 0$$

De traditionele theorie voegde hier gewoonlijk nog aan toe dat het aldus ontwikkelde kriterium perfect het wel- van het niet- en het méér- van het minder winstgevende project scheidde als aan een reeks veronderstellingen werd voldaan, maar liet het dan daarbij. Hoe men diende te handelen als één of meer van deze assumpties niet opgaan (zoals in de praktijk bijna altijd het geval zal zijn) werd gewoonlijk niet vermeld.

Ik zal de reeks veronderstellingen waarvan hier sprake is niet uitputtend opsommen, wel de belangrijkste. Deze zijn:

1 De onderneming in kwestie dient tegen de gegeven en konstante vermogenskosten te kunnen beschikken over een nagenoeg onbeperkte hoeveelheid vermogen.
2 De potentiële projecten moeten onafhankelijk zijn in economische zin, d.w.z. dat de ontvangsten en uitgaven van elk project noch positief noch negatief werden beïnvloed door het al of niet accepteren van welk ander project of welke projectencombinatie dan ook.
3 De ontvangsten en uitgaven van de projecten (welke op het moment van beoordeling alle in de toekomst liggen) behoren zowel wat de grootte als wat het tijdstip betreft met volstrekte zekerheid bekend te zijn.

3 De kwantitatieve methoden: mathematische programmering

Onder mathematische programmering zullen we verstaan alle (wiskundige) methoden en technieken die tot doel hebben de onbekende variabelen te determineren die een bepaalde relatie (doelfunktie) een optimale (maximale of minimale) waarde geven en die tegelijkertijd voldoen aan één of meerdere andere, vaak als ongelijkheden gespecificeerde, relaties (rand- of nevenvoorwaarden). Zijn zowel de doelfunktie als de nevenvoorwaarden lineaire vergelijkingen dan noemen we de techniek: lineaire programmering (l.p.); is tenminste een van beide soorten van een hogere graad dan spreken we van niet-lineaire (b.v. kwadratische) programmering (k.p.). Eisen we van te voren dat één of meer variabelen alleen gehele getallen kunnen zijn dan heet de techniek gehele getallen- of integere programmering (i.p.).

4 De toepassing

4.1. Vermogensrantsoenering

Onder vermogensrantsoenering verstaan we de situatie dat niet aan de in par. 2 onder 1 vermelde veronderstelling is voldaan: de onderneming beschikt, om welke redenen dan ook, niet over voldoende financieringsmiddelen om alle investeringsplannen die een positieve n.c.w. beloven te entameren. Bestaat deze situatie van vermogensschaarste slechts in *één* periode dan is het gebruikelijke recept: bereken voor elk potentieel project de verhouding tussen de n.c.w. en de uitgaven verbonden aan dat project en vallende binnen de betreffende periode.

Het project met de grootste (n.c.w./uitgaven)-verhouding komt het eerst voor uitvoering in aanmerking, immers het levert de grootste winst per eenheid van de schaarse faktor: geld. Vervolgens het project met de één na grootste waarde voor de genoemde verhouding, etc., net zo lang tot dat de totale uitgaven, verbonden aan de reeds geaccepteerde projecten (net niet) gelijk zijn aan het maximale te investeren bedrag.[1]) Bestaat de vermogensschaarste, tot uiting komend in vermogensbudgetten die niet mogen worden overschreden, in *meerdere* perioden (zoals bij een goede planning bijna altijd het geval zal zijn) en vallen de uitgaven verbonden aan de projecten ook in meerdere perioden, dan geeft het gebruikelijke recept geen oplossing. Er is n.l. geen enkele reden om aan te nemen dat de combinatie projecten die op basis van het kriterium max. (n.c.w./uitg.) zowel een maximale gezamenlijke n.c.w.-waarde heeft als toch nog past binnen de uitgavenbegroting van de eerste periode, ook nog past binnen de budgetten voor de tweede en volgende perioden. Tot 1963 was de theorie daarmee uitgepraat.

In 1963 demonstreerde H. M. Weingartner[2]), na voorbereidend werk van J. H. Lorie en L. Savage[3]), hoe de nog betrekkelijk jonge methoden der l.p. en i.p. met vrucht konden worden benut om het gestelde probleem op te lossen. Later onderzoek van dezelfde[4]) en andere auteurs[5]) leerde hoe met deze aanpak andere problemen uit de investeringsselektie (trouwens uit de gehele financieringsproblematiek) tot een snelle oplossing konden worden gebracht.

We herhalen hier het oorspronkelijke cijferbeeld van L + S en W. Een onderneming dient een keuze te maken uit negen potentiële projecten, die alle de eerste twee perioden uitsluitend uitgaven meebrengen. De financiële middelen ter financiering van de uitgaven in deze twee perioden zijn beperkt. De projecten zijn onafhankelijk. In het volgende staatje zijn de 9 projecten, de bijbehorende n.c.w.'s, de bijbehorende uitgaven gedurende de twee perioden en de budgetten voor die perioden samengevat (de uitgaven en de budgetten zijn reeds op hun contante waarde herleid). De genoemde grootheden zijn zowel met symbolen als in numerieke waarden aangegeven.

De projecten:	n.c.w.:	De uitgaven (c_{tj}) gedurende	
(j =)	(b_j)	t = 1	t = 2 (= n)
1	14	12	3
2	17	54	7
3	17	6	6
4	15	6	2
5	40	30	35
6	12	6	6
7	14	48	4
8	10	36	3
9 (= m)	12	18	3
De budgetten (B_t):		50	20

1) Hierbij wordt verondersteld dat ook gedeelten van projecten kunnen worden uitgevoerd.
2) H. M. Weingartner, *Mathematical Programming and the Analysis of Capital Budgeting Problems*, (1963).
3) J. H. Lorie and L. J. Savage, Three Problems in Capital Rationing, *Journal of Business*, (1955).
4) H. M. Weingartner, Capital Budgeting of Interrelated Projects, Survey and Synthesis, *Management Science*, (1966).
5) B.v. W. Baumol en R. Quandt, H. Albach, A. Charnes, W. W. Cooper, K. Kortanek, H. Markowitz, S. Reiter, e.v.a.

Op het eerste gezicht is te zien dat de projecten nr. 2 en nr. 5 op zich al niet realiseerbaar zijn. Zonder de techniek der l.p. valt echter verder niets anders te doen dan alle denkbare projectcombinaties van de overgebleven zeven uit te proberen.

Aangezien dit aantal zelfs in dit eenvoudige voorbeeld reeds gelijk is aan:

$$\sum_{r=0}^{7} \binom{7}{r} = 2^7 = 128,$$

is die methode nogal omslachtig.

In l.p.-vorm kunnen we het probleem cijfermatig als volgt structureren:

(1) maximaliseer:
$14X_1 + 17X_3 + 15X_4 + 12X_6 + 14X_7 + 10X_8 + 12X_9$ [6])
onder de voorwaarden dat:

(2) $12X_1 + 6X_3 + 6X_4 + 6X_6 + 48X_7 + 36X_8 + 18X_9 \leq 50$

(3) $3X_1 + 6X_3 + 2X_4 + 6X_6 + 4X_7 + 3X_8 + 3X_9 \leq 20$

(4) $0 \leq X_1, X_3, X_4, X_6, X_7, X_8, X_9 \leq 1$

Toelichting:
Hierin staan de X'en voor de (voorlopig nog onbekende) *gedeelten* van de projecten die in de optimale oplossing zullen worden geaccepteerd. De X'en moeten dus niet-negatief en maximaal gelijk aan 1 zijn (zie verg. 4). Vergelijking (1) geeft de lineaire doelfunktie; (2) en (3) de lineaire randvoorwaarden die betrekking hebben op de beperkte vermogensbudgetten voor de perioden 1 en 2.
In symbolen ziet het probleem er alsvolgt uit:

(1') maximaliseer $\sum_{j=1}^{m} X_j b_j$
onder de voorwaarden dat:

(2' en 3') $\sum_{j=1}^{m} c_{tj} X_j \leq B_t$, voor $t = 1, \ldots n$

(4') $0 \leq X_j \leq 1$

waarin m het aantal projecten en n het aantal tijdsperioden aangeeft.

[6]) We kunnen de projecten 2 en 5 ook laten staan, ze vallen vanzelf buiten de optimale oplossing.

De oplossing kan worden verkregen via de z.g.n. „Simplex-methode" en luidt als volgt:[7])

$X_1 = 1 \quad X_4 = 1 \quad X_7 = 0{,}045 \quad X_9 = 1$

$X_3 = 1 \quad X_6 = 0{,}97 \quad X_8 = 0$

De totale n.c.w. bedraagt 70,27. Bij de oplossing dienen de volgende opmerkingen te worden geplaatst.

Opm. 1. In de oplossing komen twee fractionele projecten voor. (X_6 en X_7). Twee projecten worden dus gedeeltelijk geaccepteerd. Zijn de projecten ondeelbaar dan moet een nadere beslissing genomen worden. Men zou bijvoorbeeld X_6 volledig kunnen uitvoeren en X_7 helemaal niet, wanneer men in dat geval tenminste binnen de gestelde voorwaarden blijft.

Men kan het optreden van fractionele projecten ook voorkomen door gebruik te maken van de reeds aangeduide techniek van „integere of geheeltallige programmering". De waarden van X_j kunnen dan slechts gehele getallen zijn (in dit geval nul of één: $X_j = 0$ of $X_j = 1$).

Opm. 2. Het is niet altijd nodig gebruik te maken van de i.p., welke een stuk bewerkelijker is dan de l.p. Men kan n.l. bewijzen dat het aantal fractionele projecten nooit hoger kan zijn dan het aantal budget-randvoorwaarden; en dus altijd beperkt zal blijven (dit is ook intuïtief aannemelijk). Men kan dan de met l.p. gevonden oplossing met de hand bijwerken zoals hierboven reeds is aangegeven. De totale n.c.w. bedraagt dan 70.

Opm. 3. Behalve dat altijd en in een beperkt aantal bewerkingen een optimale oplossing wordt gevonden, geeft de l.p.-techniek nadere voordelen in de vorm van een verdiept inzicht in het probleem en zijn oplossing. Zo behoort bij ieder l.p.-probleem dat de vorm aanneemt van een maximalisatie, een spiegelbeeld in minimalisatie-vorm, de „duale" genoemd. In ons voorbeeld:

(5) minimaliseer: $\sum_{t=1}^{n} \rho_t B_t + \sum_{j=1}^{m} \mu_j$

onder de voorwaarde:

(6) $\sum_{t=1}^{n} \rho_t c_{tj} + \mu_j \geq b_j$, voor $j = 1, \ldots m$

(7) $\rho_t, \mu_j \geq 0$

De optimale oplossing van dit duale probleem is dezelfde als die van het oorspronkelijke, „primale", probleem. De variabelen ρ_t van de duale corresponderen met de budgetrandvoorwaarden van de primale, de variabelen μ_j

---

[7]) Zie voor deze techniek ieder standaard werk over Mathematische Programmering, b.v. A. Charnes en W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming*, I en II.

behoren bij de randvoorwaarden waaraan de X_j zijn onderworpen (resp. de verg. (2) + (3) en (4) op p. 232). De economische interpretatie van de ρ_t is die van „schaduwprijs" of interne rentevoet: de prijs die de onderneming, gegeven de investeringsmogelijkheden, maximaal bereid is te betalen voor het beschikken over extra eenheden vermogen in de perioden t = 1 en t = 2. Deze ρ_t (resp. $\rho_1 = 0{,}136$ en $\rho_2 = 0{,}1864$), geven dus belangrijke financiële informatie en zijn een nuttig „bijprodukt" van de l.p.-oplossing. Immers, het is belangrijk te weten dat de winst nog kan worden vergroot door het aantrekken van extra vermogen in de twee perioden, mits de te betalen interestvoet blijft beneden 13,6% en 18,6% respectievelijk.

Opm. 4. Men kan de projecten in principe indelen in vier categorieën:
a. de projecten die in hun geheel in de optimale oplossing worden geaccepteerd: *„integraal geaccepteerd".*
b. de projecten die gedeeltelijk worden aangenomen, fractionele of *„marginaal geaccepteerde"* projecten.
c. de projecten die niet worden aangenomen maar waarbij dit „voor het zelfde geld" wel het geval had kunnen zijn omdat ze evengoed passen binnen de optimale oplossingen als sommige die wel zijn geaccepteerd: de *marginaal verworpen"* projecten.
d. de projecten die geheel worden verworpen omdat ze gegeven het vermogensbeslag onvoldoende ncw hebben: *„integraal verworpen".*

De l.p.-techniek maakt het mogelijk snel en ondubbelzinnig vast te stellen tot welke groep een bepaald project behoort.

Hiertoe maken we gebruik van een tweetal bekende stellingen uit de l.p.-theorie die we hier uiteraard niet kunnen bewijzen.

Stelling I. Een primale (duale) variabele en zijn corresponderende duale (primale) randvoorwaarde kunnen in de optimale oplossing niet beide als strikte ongelijkheden voorkomen[8])

Stelling II. In de optimale oplossing van een l.p.-vraagstuk wordt een alternatief optimum gesignaleerd doordat geldt (in de reeds gebruikte notatie; sterretje indiceert optimum)[9])

$$\Sigma\, \rho_t^* c_{tj} + \mu_j^* - b_j = 0$$

Uit stelling I kunnen we de volgende twee conclusies trekken

1 noem $\Sigma\, \rho_t c_{tj} + \mu_j - b_j : \gamma_j$, dan geldt voor

alle geaccepteerde projecten (integraal en marginaal), dat

$$X_j^* > 0, \text{ dus } \gamma^* = 0$$

[8]) Deze stelling staat bekend als het „Theorem of the Alternative", zie b.v. A. Charnes en W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming,* p. 185 en p. 441.
[9]) Zie b.v. Charnes en Cooper, *op. cit.* p. 175 en p. 560 e.v.

2 noem $1 - X_j : q_j$, dan geldt voor alle verworpen projecten (integraal en marginaal) en voor alle marginaal geaccepteerde projecten dat

$$X_j^* < 1, \text{ dus } q_j^* > 0, \text{ dus } \mu_j^* = 0$$

Uit stelling II volgt de derde conclusie.

3 Gezien de definitie van γ_j geldt voor alle marginaal verworpen projecten, dat

$$\Sigma \rho_t^* c_{tj} + \mu_j^* - b_j = 0, \text{ dus } \gamma_j^* = 0$$

De combinatie van deze drie conclusies geeft de volgende indeling van de vier categorieën projecten van p. 234:

	integraal	marginaal
geaccepteerd	a. *integraal geaccepteerd* $x_j = 1$ $\gamma_j = 0$ $\mu_j > 0$	b. *marginaal geaccepteerd* $0 < X_j < 1$ $\gamma_j = 0$ $\mu_j = 0$
verworpen	d. *integraal verworpen* $x_j = 0$ $\gamma_j > 0$ $\mu_j = 0$	c. *marginaal verworpen* $x_j = 0$ $\gamma_j = 0$ $\mu_j = 0$

Opm 5. Met de l.p.-aanpak is het eveneens mogelijk andere dan financiële overwegingen mee te laten spelen. B.v. stel dat ook de hoeveelheid beschikbare arbeid een bottle-neck vormt. Neem aan: de maximaal aan te trekken hoeveelheid arbeid in periode t is A_t manjaren, en voor de uitvoering van project j is in periode t vereist a_{tj} manjaren arbeid. De toevoeging van de n volgende randvoorwaarden:

$$\sum_{j=1}^{m} X_j a_{tj} \leq A_t, \text{ voor } t = 1, \ldots n,$$

zorgt er automatisch voor dat alleen die combinatie projecten wordt gekozen die zowel binnen het vermogensbudget als binnen het arbeidsbudget valt (en de hoogste gekapitaliseerde winst scoort).

4.2. Afhankelijkheid

Onder afhankelijkheid verstaan we de situatie dat niet aan de in par. 2 onder 2 vermelde veronderstelling is voldaan: de ontvangsten en uitgaven - en dus de ncw - van sommige projecten worden beïnvloed door het al of niet accepteren van bepaalde andere projecten. Verschillende vormen en graden van afhankelijkheid kunnen voorkomen. Soms is er een negatieve afhankelijkheid. Een project j is negatief afhankelijk van een project k, indien de cash-flow van j kleiner is in het geval dat j en k samen voorkomen dan in het geval dat j alleen wordt geaccepteerd. Het betreft hier concurrerende investeringen. In het uiterste geval gaat het om strijdige investeringen; zodra één project is aangenomen wordt het andere overbodig. Dit geval doet zich vaak voor, met name als een keuze moet worden gemaakt uit een aantal alternatieve produktiemiddelen of -processen. Positieve afhankelijkheid doet zich voor bij complementaire investeringen. De gezamenlijke cash-flow van twee complementaire projecten is groter dan de som van elk afzonderlijk.

Deze - economisch complexe - relaties kunnen worden „vertaald" in simpele vergelijkingen die als randvoorwaarden in de probleemstelling worden opgenomen.

Is b.v. project j strijdig met project k (elkaar uitsluitende projecten) dan garandeert de volgende vergelijking:

$$X_j + X_k \leq 1,$$

dat òf j òf k òf geen van beide, doch nimmer beide samen, worden gekozen. (Ter herinnering: X_j is het gedeelte van project j dat wordt geaccepteerd in de optimale oplossing).

Ook de volgende vergelijking:

$$X_j \cdot X_k = 0, \text{ [10]}$$

gaat alleen op als tenminste één van de twee projecten niet gekozen wordt en heeft dus hetzelfde effect. (Een produkt van twee variabelen is alléén 0 indien tenminste één ervan de waarde 0 aanneemt.)

Wil men bij twee positief afhankelijke projecten m en n er zeker van zijn dat beide worden gekozen (omdat de één zonder de ander waardeloos is: de uiterste vorm van complementariteit) dan kan dat door de volgende vergelijking toe te voegen:

$$X_m \cdot X_n = 1 \text{ [10]}$$

Immers het produkt van twee variabelen is alléén 1 indien beide de waarde 1 aannemen.

Ook eenzijdige afhankelijkheid kan voorkomen en in het model worden verwerkt. Is b.v. project 1 onafhankelijk maar is project h positief afhankelijk van 1 dan geeft men dat aan met:

$$X_h \leq X_1.$$

[10]) Deze relaties zijn niet langer lineair. De toepassing vereist derhalve het gebruik van de techniek van kwadratische programmering.

Project h wordt dan alleen gekozen (X_h heeft alleen de waarde 1) indien tevens l wordt geaccepteerd (indien tevens $X_l = 1$). Is $X_l = 0$ dan is ook $X_h = 0$.

Deze voorbeelden kunnen met vele andere worden aangevuld; ze demonstreren het gemak van het gebruik van de wiskunde op dit terrein.

4.3. Onzekerheid

Ook de derde van de in par. 2 vermelde veronderstellingen - de aanname dat alle (toekomstige) ontvangsten en uitgaven van alle projecten met volstrekte zekerheid kunnen worden voorspeld - kan vervallen indien de mathematische programmering wordt ingeschakeld. In recente jaren is dit op verschillende manieren gedemonstreerd. Niet alle kunnen hier worden behandeld. De drie methoden die de meeste bekendheid hebben gekregen zijn:

- „chance-constrained programming",
- „parametric programming",
- „variance minimization".

Deze kunnen helaas alleen in het kort worden besproken.

4.3.1. Chance-constrained programming

In deze benadering worden de randvoorwaarden (de budgetongelijkheden) niet opgevat als deterministische vergelijkingen maar als stochastische vergelijkingen waarvan de variabelen stochastische grootheden zijn. Per randvoorwaarde wordt een subjectief bepaalde, maximale overschrijdingskans aangegeven. M.a.w. de ongelijkheden (2') en (3') van par. 4.1 op p. 232.

$$\sum_{j=1}^{m} c_{tj} X_j \leq B_t \text{ voor } t = 1, \ldots, n,$$

worden vervangen door:

$$P\left(\sum_{j=1}^{m} c_{tj} X_j \leq B_t\right) \geq \alpha_t \text{ voor } t = 1, \ldots, n,$$

$$0 \leq \alpha_t \leq 1$$

waarin P staat voor waarschijnlijkheid en $1-\alpha_t$ de maximale overschrijdingskans van het budget B_t in periode t aangeeft en dus een maatstaf is voor het risico dat men bereid is te lopen.

Ook kunnen chance-constraints worden geformuleerd voor andere dan budgetbeperkingen. Zo kan men b.v. eisen dat pay-back-periodes van individuele projecten of van gehele investeringsprogramma's met een bepaalde kans, zeg 95%, een zekere waarde, zeg 3 jaar, niet te boven gaan. Voor de oplossingstechniek wordt hier verder verwezen naar de gespecialiseerde literatuur.[11])

4.3.2. Parametric programming

Onder parametric programming verstaat men rekenkundige technieken die de

[11]) B. v. R. Byrne, A. Charnes, W. W. Cooper, K. Kortanek, A Chance Constrained Approach to Capital Budgeting, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, (1967).

mogelijkheid bieden de oplossingen te berekenen die ontstaan als bepaalde constanten (parameters) in een l.p.-model continu binnen een bepaald interval kunnen variëren. Men onderzoekt zo als het ware de gevoeligheid van de optimale oplossing voor wijzigingen in bepaalde belangrijke grootheden („gevoeligheidsanalyse", „sensitivity analysis").

Twee groepen zijn als zodanig te onderscheiden, nl. de parameters van de maximand en die van de randvoorwaarden.

In overeenstemming hiermee zijn er twee varianten: de „parametrische kostenrij"- en de „parametrische rechterkant"-programmering. Bij de eerstgenoemde wordt de oorspronkelijke maximand (1') van par. 4.1 op p. 232:

$$\max. \sum_{j=1}^{m} X_j\, b_j, \text{ vervangen door}$$

$$\max. \sum_{j=1}^{m} X_j\, (b_j + \Delta\, b'_j)$$ [12])

Door systematisch de Δ te variëren kunnen de konsekwenties van wijzigingen in b_j (welke het gevolg zijn van de onzekerheid m.b.t. toekomstige net cashflows) worden nagegaan. Het is hiervoor niet nodig dat het gehele probleem van voren af aan wordt opgelost; men kan de nieuwe optimale oplossing steeds rechtstreeks van de oude optimale afleiden. Bij de parametrische rechterkant programmering worden de randvoorwaarden (2') en (3') van par. 4.1 op p. 232.

$$\sum_{j=1}^{m} c_{tj}\, X_j \leq B_t, \text{ vervangen door}$$

$$\sum_{j=1}^{m} c_{tj}\, X_j \leq (B_t + \Delta\, B'_t)$$ [12])

Door Δ te variëren wordt de gevoeligheid van de oplossing voor mutaties in de budgetten, welke weer veroorzaakt worden door de onzekerheid, onderzocht.

4.3.3. Variance minimization

Bij de tot dusverre behandelde methoden worden niet rechtstreeks de minst onzekere projecten geselecteerd noch worden de onzekerheden die aan de cash flows van de individuele projecten zijn verbonden door de keuze van bepaalde projectcombinaties gecompenseerd. Alleen wordt de kans om de randvoorwaarden te overschrijden geminimaliseerd (4.3.1) en worden de eventuele kwalijke gevolgen van het optreden van andere dan de meest waarschijnlijke uitkomsten zoveel mogelijk van te voren berekend (4.3.2). In zekere zin zijn dit secundaire methoden.

Meer primair zijn die methoden die bij het bepalen van een optimaal investeringsprogramma direkt rekening houden met de mate van onzekerheid

[12]) De Δ's kunnen zowel positief als negatief zijn; toepassing veronderstelt dat de verdelingen van b_j en B_t bekend zijn.

verbonden aan de cash-flows van de individuele projecten alsmede met eventuele interacties tussen de diverse projecten onderling en tussen de projecten en de bestaande activa, en die expliciet rekening houden met de beginselen van risicospreiding en risicomijding.

Bij de variance-minimization methoden worden de cash flows in de diverse jaren en de daarop gebaseerde ncw's der individuele projecten opgevat als statistisch onderling afhankelijke toevalsvariabelen met gegeven en bekend veronderstelde (waarschijnlijkheids-) verdelingen, samengevat in gemiddelden (E_j = verwachte waarde, als centrale tendentie der verdeling), varianties (σ_j^2, als maatstaf voor de spreiding rondom het gemiddelde, een kwantitatieve uitdrukking van de mate van onzekerheid) en covarianties (σ_{ij}, die de soort en de mate van correlatie tussen de uitkomsten der projecten aangeeft).

Op basis van a priori aannemelijke veronderstellingen omtrent het keuze gedrag van subjecten in onzekere situaties (eventueel bevestigd door geobserveerd gedrag van proefpersonen), zowel als via formele afleiding van bepaalde (m.n. kwadratische) nutsfunkties, veronderstelt men dat een beslisser de volgende uitdrukking tracht te maximaliseren:

$U(E) - \lambda\ \sigma^2$, waarin $U(E)$ is het nut van de verwachte ncw van de te kiezen projectencombinatie, σ^2 de variantie, en waarin λ, een positieve constante, uitdrukking geeft aan de subjectief bepaalde „risico-afkeer" van de betrokkene. De λ maakt het mogelijk tot een onderlinge afweging te komen van (het nut van) de verwachte ncw, een positief gewaardeerde doelvariabele, en σ^2, negatief gewaardeerd door „rationele" beslissers.

Definiëren we de X_i zoals te voren, dan kan, met gebruikmaking van de uitdrukking voor de variantie van een groep toevalsvariabelen, bovenstaande uitdrukking worden vervangen door:

$$\text{maximaliseer} \quad U\left(\sum_{i=1}^{m} E_i X_i\right) - \lambda \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} X_i \sigma_{ij} X_j.$$

„Vertaald" in termen van mathematische programmering betekent dit het minimaliseren van een kwadratische funktie - het laatste deel van de expressie - onder het gelijktijdig maximaliseren van een lineaire funktie - het eerste stuk -: een kwadratisch programmeringsprobleem dat met bestaande wiskundige technieken kan worden opgelost. Toegepast op de selectie van effecten heeft bovenstaande, onder de naam van „portfolio-selection" ruime bekendheid en algemene toepassing gevonden.

5 Samenvatting

In de bedrijfseconomie kunnen kwantitatieve methoden en technieken met vrucht worden toegepast. Dit geldt voor bijna alle onderdelen van de bedrijfseconomie en voor zeer veel van de beschikbare methoden en technieken. In dit artikel werden een groep kwantitatieve methoden - bekend onder de verzamelnaam: mathematische programmering -, en een enkel bedrijfseconomisch toepassingsgebied: de beoordeling en selektie van investeringsplannen, gecombineerd.

Gegeven de bedoeling van dit speciale nummer kon noch naar grote diepgang noch naar een uitputtende behandeling worden gestreefd. Het artikel pretendeert niet resultaten van nieuwe research te vermelden noch „leken" te transformeren in „specialisten". Als de lezer die normaliter van deze methoden en technieken geen gebruik maakt, de „kracht" daarvan heeft geproefd is het beoogde doel reeds ruimschoots bereikt.